



9. (ii) Με απαγωγή σε άτοπο.
 10. $p \equiv 1, 2 \pmod{3}$.
 11. Αρκεί $3|(p^2 - q^2)$ και $8|(p^2 - q^2)$.
 12. $77 \equiv 7 \pmod{10}$ και $333 \equiv 3 \pmod{10}$.
 13. $2 \equiv -1 \pmod{3}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Παίρνουμε τους αριθμούς $a, a+1, \dots, a+(v-1)$.
 2. $a=6, \beta=3, \gamma=6$ καθώς και $a=14, \beta=9$ και $\gamma=1$.
 3. Παίρνουμε τους αριθμούς $a, a+2, a+4, \dots, a+2(v-1)$, όπου a περιττός.
 4. (ii) Υποθέτουμε ότι $\frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} = \rho \in \mathbb{Z}$ οπότε $a^2 + \beta^2 = \rho a\beta$.
 5. (i) Με απαγωγή σε άτοπο. Αν $(a, \beta) = \delta$ τότε $\left(\frac{a}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1, \dots$.
 (ii) Χρησιμοποιούμε το (i).
 6. Με απαγωγή σε άτοπο.
 7. (i) Με τη μαθηματική επαγωγή
 (ii) Ο x θα είναι της μορφής 2^k .
 8. (i) $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)$
 (ii) Υποθέτουμε ότι $v = 2^k \cdot \lambda$, όπου λ περιττός > 1 .
 9. (i) $a \equiv v \pmod{8}$, $v=0, 1, \dots, 7$
 (ii) Με απαγωγή σε άτοπο και με τη βοήθεια της (i)
 10. $100 = 4 \cdot 25$, με $(4, 25) = 1$.
 11. $2v = 2(v-2) + 4$.
 12. $x^2 = y^2 + 24$
 13. Όχι.

$$(v) \text{ Αν } (a, \beta) = \delta, \text{ τότε } \left(\frac{a}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1.$$

15. Οι a, β είναι της μορφής $a = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ και $\beta = p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$ με $\beta_i, a_i \geq 0$.
 16. Οι a, β δεν έχουν κοινούς πρώτους παράγοντες.

5 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

§ 5.1, 5.2 Α' Ομάδας

1. α) 6 β) $-\frac{3}{2}$.
 2. α) $x=1, y=2$ β) -2 γ) $x=-15, y=27$.
 4. α) $y'y$ β) $x'x$ γ) $y=x$.
 5. α) $3+4i$ β) $-3-6i$ γ) 0 δ) $2+23i$
 ε) $-3+18i$ στ) 25 ζ) $1+7i$.
 6. α) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ β) -1 γ) $2i$
 δ) $-2+2\sqrt{3}i$ ε) $1+i$ στ) $\frac{4}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3}i$
 7. α) αδύνατο β) $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{1}{5}$
 γ) $x = -\frac{1}{2}, y = 0$
 8. α) 0 β) $2i$
 9. α) $-5-7i$ β) $-4+9i$ γ) $-4i$
 δ) 11 ε) i στ) 0
 10. α) ως προς άξονα $x'x$ β) ως προς κέντρο $O(0,0)$ γ) ως προς άξονα $y'y$.
 11. $z_2 = \bar{z}_1$.
 12. α) $y=3$ β) $x'x$ και $y'y$ γ) διχοτόμοι
 δ) $x=1$.



1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$.
2. 2
3. 0
4. -2, 0, 2
5. α) $0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ β) $0, \pm 1, \pm i$.
6. $z = x + yi$ κτλ.
7. $\beta - \alpha i = -i(\alpha + \beta i)$ κτλ.
8. α) $z = x + yi$ κτλ. β) αρκεί να δείξετε ότι $u = \bar{u}, v = -\bar{v}$
9. α) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ή $y'x$ εκτός του $O(0,0)$
β) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ή $x'x$ εκτός του $O(0,0)$

§ 5.3 Α' Ομάδας

1. $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5, 5, 5, 4, 1, 8, 5, \frac{\sqrt{10}}{5}$.
2. 2, 1, 1, 1.
3. α) $z \in \mathbb{R}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. α) $x^2 + y^2 = 1$ β) $x^2 + (y-1)^2 = 1$
γ) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$
δ) Κυκλικό δακτύλιο
ε) Εκτός κύκλου $x^2 + y^2 = 2$.
5. α) Στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $A(-1,0), B(0,2)$.
β) Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του AB και το B όπου $A(0,1)$ και $B(-1,0)$.
6. Ο μοναδιαίος κύκλος
7. $2i, 6i$
8. $|w-1|=2$.

1. Αν $z = x + yi$, τότε $\operatorname{Re}(z) = x, \operatorname{Im}(z) = y$ κτλ.
2. $w = -\bar{w}$ κτλ.
3. $w = \bar{w}$ κτλ.
4. $w = -\bar{w}$ κτλ.
5. Αρκεί $|w|=1$
6. $|z|=1$
7. 4
8. $y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}, \left(\frac{15}{34}, -\frac{60}{34}\right)$
9. Αν $z_2 = x_2 + y_2i$, τότε $\frac{x_2^2}{5^2} + \frac{y_2^2}{3^2} = 1$.
10. α) $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$ β) $\frac{1}{z_1} = \bar{z}_1, \frac{1}{z_2} = \bar{z}_2$ κτλ.

§ 5.4 Α' Ομάδας

1. α) $2\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}\right)$
β) $2\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
γ) $2\left(\sin\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3}\right)$
δ) $2\left(\sin\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$
ε) $4(\sin 0 + i\eta\mu 0)$
στ) $4(\sin \pi + i\eta\mu \pi)$.
2. α) $12\sqrt{2}(1+i)$
β) $10i$
γ) i
3. α) $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$ β) $6i$ γ) $-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$.
4. α) $4 + 4\sqrt{3}i$ β) 3^8 γ) 1.
5. i .



6

8. Στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$.

9. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

10. 2 και $\frac{2\pi}{3}$ ή 2 και $\frac{4\pi}{3}$.

§ 5.4 Β' Ομάδας

- α) 1 και $\nu\theta$ β) -1
- Να γράψετε τους $1+i$, $1-i$ σε τριγωνομετρική μορφή.
- Να εργαστείτε με διανυσματικές ακτίνες.
- α) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$, $x > 0$
β) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y > 0$
γ) $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, εκτός του $O(0,0)$.
- α) $5i$ β) $-\frac{100}{29} + \frac{105}{29}i$.
- Να εφαρμόσετε το θεώρημα του De Moivre.
- α) $|w|=2$ β) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
- $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Πρέπει $\Delta \leq 0$.

§ 5.5 Α' Ομάδας

- α) Κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου
β) Κορυφές τετραγώνου
γ) Κορυφές κανονικού εξαγώνου.
- α) $-i = \sin \frac{3\pi}{2} + i\eta\mu \frac{3\pi}{2}$ κτλ.

$\kappa=0,1,2,3$

γ) $z_\kappa = 3 \left[\sin \left(\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}}{5} \right) + i\eta\mu \left(\frac{2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}}{5} \right) \right]$

$\kappa=0,1,2,3,4$

- α) $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \sin \frac{\pi}{4} + i\eta\mu \frac{\pi}{4}$ κτλ.
β) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{5\pi}{3} + i\eta\mu \frac{5\pi}{3}$ κτλ.
γ) $-64 = 64(\sin \pi + i\eta\mu \pi)$ κτλ.
- α) $z^3 + 3z^2 + 4z = 8 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 4z + 8) = 0$ κτλ.
β) Να θέσετε $z^2 = w$, $\pm i$, $\pm 2i$.
- $2-i$, $-\frac{2}{3}$
- 4
- Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την: $x^6 = 1$, $x \neq 1$.
- Οι ρίζες είναι -3 και $\pm i\sqrt{3}$.

§ 5.5 Β' Ομάδας

- α) Είναι $1-i = \sqrt{2} \left(\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i\eta\mu \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$
β) Η εξίσωση γράφεται $\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 = 1-i$.
- Η εξίσωση γράφεται $(z+1)^2(z^2+z+1)(z^2-z+1) = 0$ κτλ.
- Έχουμε $z^7 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^7 = \sin \pi + i\eta\mu \pi$ κτλ.
- $\pm i$
- 1, i , -1, $-i$
- Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.
- α) 2, 4, -4, β) $p=4$, $q=16$.

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. β) $\frac{x^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2} = 1.$
2. $x^2 - y^2 = 1.$
3. α) $y = 3x - 7$ β) $y = 3x - 9$ γ) $A\left(\frac{27}{10}, -\frac{9}{10}\right)$
4. α) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 β) Τα σημεία της παραβολής $y^2 = 4x.$
6. Να πάρετε τα μέτρα και των δύο μελών της εξίσωσης.
7. α) Οι τιμές του τριωνύμου είναι ομόσημες του a
 β) Είναι γινόμενο δύο συζυγών παραστάσεων.
8. Να εξισώσετε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του αθροίσματος $1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$ με το μηδέν.